Практическое занятие №11.

Задачи для самостоятельной работы студента

Решение задач по темам: **Решение задач на приложения определенного интеграла.**

1) Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в прямоугольных координатах
a) $y = x^2$, $y + x = 2$. b) $y = 2x - x^2$, $y + x = 0$.

2) Найти длину дуги кривой a) $y = e^x$ $(0 \leqslant x \leqslant x_0)$. b) $y = x^{3/2}$ $(0 \leqslant x \leqslant 4)$.

3) Найти объемы тел, ограниченных поверхностями, полученными при вращении отрезков следующих линий вокруг оси Ox и оси Oy.

a) $y = 2x - x^2$, $y = 0$; b) $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2$, $y = b\left|\frac{x}{a}\right|$;

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Вычисление площадей плоских фигур

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (3.1) \qquad\qquad S = \int_a^b |f(x)|\,dx. \qquad (3.3)$$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \qquad (3.4)$$

$$S = \int_c^d \varphi(y)\,dy. \qquad (3.5)$$

Если криволинейная трапеция ограничена сверху *кривой, заданной параметрическими уравнениями* $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $y(t) \geqslant 0$, $t \in [t_1; t_2]$, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a; b]$ оси Ox, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt, \qquad (3.6)$$

где t_1 и t_2 определяются из равенств $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

Площадь *криволинейного сектора*, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, вычисляется по формуле (см. рис. 90):

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi. \qquad (3.7)$$

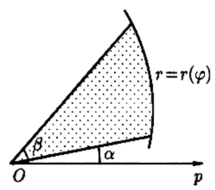


Рис. 90

9.3.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \sin x$, прямыми $x = -\frac{7}{6}\pi$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$.

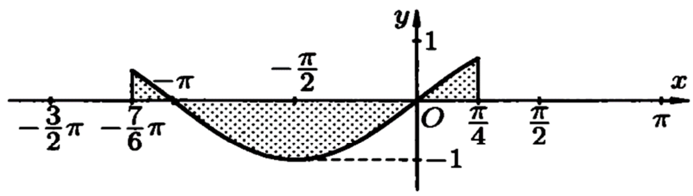


Рис. 91

Фигура имеет вид, изображенный на рисунке 91. Площадь фигуры находим по формуле (3.3):

$$S = \int_{-\frac{7}{6}\pi}^{\frac{\pi}{4}} |\sin x|\,dx = \int_{-\frac{7}{6}\pi}^{-\pi} \sin x\,dx - \int_{-\pi}^{0} \sin x\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx =$$

$$= -\cos x\Big|_{-\frac{7}{6}\pi}^{-\pi} + \cos x\Big|_{-\pi}^{0} - \cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 =$$

$$= \frac{1}{2}(8 - \sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

9.3.5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 6$ и $y = -x^2 + 5x - 6$.

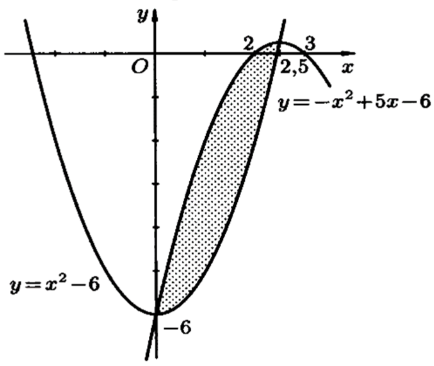


Рис. 92

Найдем абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Для этого решаем систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 6, \\ y = -x^2 + 5x - 6. \end{cases}$$

Отсюда находим $x_1 = 0$, $x_2 = 2{,}5$. Искомую площадь (см. рис. 92) находим по формуле (3.4):

$$S = \int_0^{2,5} (-x^2 + 5x - 6 - x^2 + 6)\,dx = \int_0^{2,5} (-2x^2 + 5x)\,dx = 5\frac{5}{24}.$$

9.3.13. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x^3$, $y = 8$, $x = 0$.

Для вычисления искомой площади воспользуемся формулой (3.5):

$$S = \int_0^8 \sqrt[3]{y^2}\,dy = \int_0^8 y^{\frac{2}{3}}\,dy = \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}}\Big|_0^8 = \frac{96}{5}.$$

Заметим, что искомую площадь можно найти, используя формулу (3.1) как разность площадей прямоугольника $OABC$ и трапеции OBC (см. рис. 93):

$$S = 4 \cdot 8 - \int_0^4 \sqrt{x^3}\,dx = 32 - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{5} = \frac{96}{5}.$$

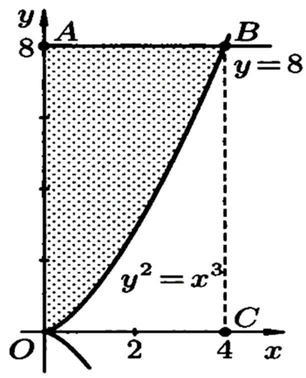


Рис. 93

9.3.18. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

◔ Воспользуемся симметрией фигуры (она изображена на рисунке 94) и найдем сначала четвертую часть искомой площади.

Воспользуемся формулой (3.6). Находим, что $t_1 = \frac{\pi}{2}$ (из равенства $0 = a\cos^3 t$) и $t_2 = 0$ (из равенства $a = a\cos^3 t$). Имеем

$$\frac{1}{4}S = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t(a\cos^3 t)'\,dt = -a^2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^3 t\cdot 3\cos^2 t\sin t\,dt =$$

$$= 3a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\,dt = 3a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t\cos t)^2\sin^2 t\,dt =$$

$$= 3a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2t\sin^2 t\,dt = \frac{3}{4}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos 4t)\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{3}{16}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2t-\cos 4t+\frac{1}{2}\cos 6t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt =$$

$$= \frac{3}{16}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\cos 2t-\cos 4t+\frac{1}{2}\cos 6t\right)dt =$$

$$= \frac{3}{16}a^2\left(t-\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{1}{4}\sin 4t+\frac{1}{12}\sin 6t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{16}a^2\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3a^2\pi}{32}.$$

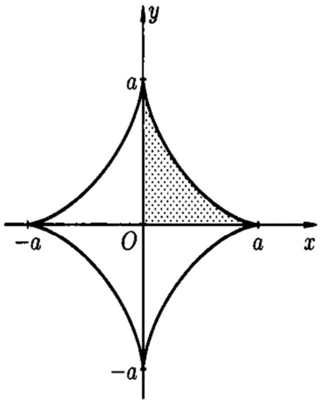


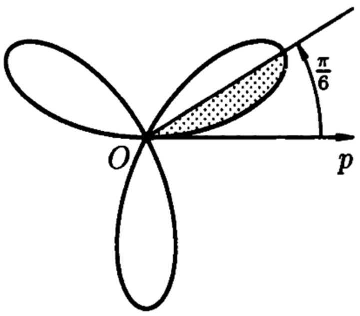
Рис. 94

Значит, $S = \frac{3a^2\pi}{8}$. ●

9.3.25. Найти площадь фигуры, ограниченной «трехлепестковой розой» $r = a\sin 3\varphi$.

◔ На рисунке 95 изображен график функции. Найдем сначала шестую часть искомой площади (выделена на рисунке).

Используем формулу (3.7):



$$\frac{1}{6}S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(a\sin 3\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 3\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}(1-\cos 6\varphi)\,d\varphi = \frac{a^2}{4}\left(\varphi-\frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{6}-0\right) = \frac{\pi a^2}{24}.$$

Рис. 95

Значит, $S = \frac{\pi a^2}{4}$. ●

9.3.26. Найти площадь, ограниченную кардиоидой $r = a(1-\cos\varphi)$ и окружностью $r = a$.

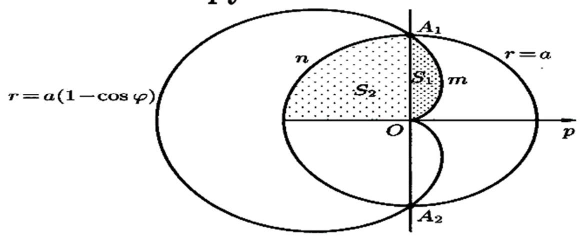


Рис. 96

На рисунке 96 показана фигура, площадь которой требуется найти. Найдем точки пересечения кардиоиды с окружностью. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} r = a(1 - \cos\varphi), \\ r = a, \end{cases}$$

находим, что таких точек — две: $A_1\left(a; \frac{\pi}{2}\right)$ и $A_2\left(a; -\frac{\pi}{2}\right)$. Половина искомой площади равна сумме площадей криволинейных секторов OmA_1O и OA_1nO. В первом секторе полярный угол изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а во втором — от $\frac{\pi}{2}$ до π. Итак,

$$\frac{1}{2}S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (a(1 - \cos\varphi))^2\, d\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} a^2\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\cos\varphi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) d\varphi + \frac{1}{2}a^2 \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}a^2\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\left(\frac{3\pi}{4} - 2\right) + \frac{1}{2}a^2\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{5}{4}\pi - 2\right),$$

следовательно, $S = 2a^2\left(\frac{5}{8}\pi - 1\right)$. ●

Вычисление длины дуги кривой

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx; \tag{3.8}$$

Если кривая задана *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

причем $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, то длина дуги вычисляется по формуле

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt\,. \tag{3.10}$$

Если кривая задана уравнением в *полярных координатах* $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi\,. \tag{3.11}$$

9.3.85. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln\sin x$ от $x_1 = \frac{\pi}{3}$ до $x_2 = \frac{2}{3}\pi$.

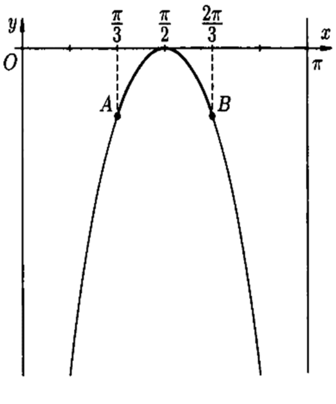


Рис. 99

◯ Изобразим часть графика функции $y = \ln \sin x$ при $x \in (0; \pi)$ (см. рис. 99). Воспользуемся формулой (3.8), предварительно найдя выражение $\sqrt{1+(y')^2}$:

$$y = \ln \sin x, \quad y' = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{1}{\sin x},$$

т. к. $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi\right]$. Находим длину l дуги AB:

$$l = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} = \ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\ln\sqrt{3}.$$ ●

9.3.92. Найти длину астроиды: $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ (см. рис. 94).

◯ Найдем сначала $l/4$, т. е. длину дуги кривой, лежащей в первой четверти. Воспользуемся формулой (3.10):

$$\frac{l}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a\cos^3 t)_t'^2 + (a\sin^3 t)_t'^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(3a\cos^2 t(-\sin t))^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt =$$

$$= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t\, dt = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, d(\sin t) = 3a\frac{(\sin t)^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}a.$$

Следовательно, $l = 6a$.

Отметим, что уравнение астроиды в прямоугольных координатах имеет вид $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Для нахождения ее длины можно было бы воспользоваться формулой (3.8). ●

9.3.101. Найти длину кардиоиды: $r = a(1+\cos\varphi)$ (см. рис. 100).

◯ Воспользуемся формулой (3.11). Сначала найдем половину длины кривой, т. е. $l/2$.

$$\frac{l}{2} = \int_0^{\pi} \sqrt{(a(1+\cos\varphi))^2 + (a(1+\cos\varphi))'^2}\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi) + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= a\int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\varphi}\, d\varphi = a\int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi =$$

$$= a\int_0^{\pi} 2\sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = -4a\cos\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi} = -4a(0-1) = 4a,$$

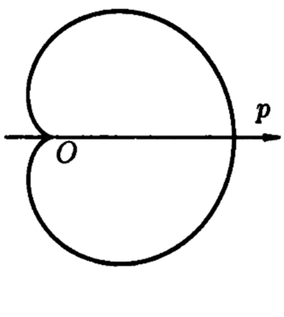


Рис. 100

значит $l = 8a$. ●

Вычисление объемов тел

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \qquad (3.12) \qquad V = \pi \int_c^d x^2\,dy. \qquad (3.15)$$

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\,dx, \qquad (3.13)$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy\,dx, \quad a \geqslant 0. \qquad (3.14)$$

9.3.142. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + 4y^2 = 1$, $z = x$ $(x \geqslant 0)$, $z = 0$.

◔ В результате пересечения эллиптического цилиндра $x^2 + 4y^2 = 1$ плоскостями $z = 0$ и $z = x$ получим тело, изображенное на рисунке 103. Сечение тела, перпендикулярное оси Ox, проведенное на расстоянии x от начала координат представляет собой прямоугольник $ABCD$. Найдем его площадь $S = S(x)$. Высота (ширина) MN прямоугольника равна x, т.е. $|MN| = x$ (в прямоугольном треугольнике $\widehat{NMO}$ угол NOM равен 45°). Точка $D(x; y)$ лежит на эллипсе $x^2 + 4y^2 = 1$. Зна-

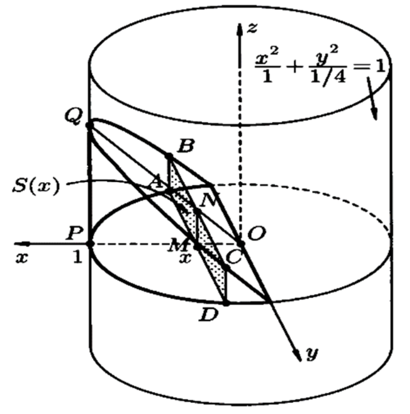


Рис. 103

чит, $MD = y = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{4}}$, т.е. $|MD| = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2}$. Следовательно, $S(x) = AD \cdot MN = 2MD \cdot MN = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2} \cdot x$, т.е. $S(x) = x\sqrt{1-x^2}$. По формуле (3.12) находим

$$V = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,d(1-x^2) =$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \quad ●$$

9.3.143. Найти объем тела, ограниченного двумя цилиндрами $x^2 + y^2 = R^2$ и $x^2 + z^2 = R^2$.

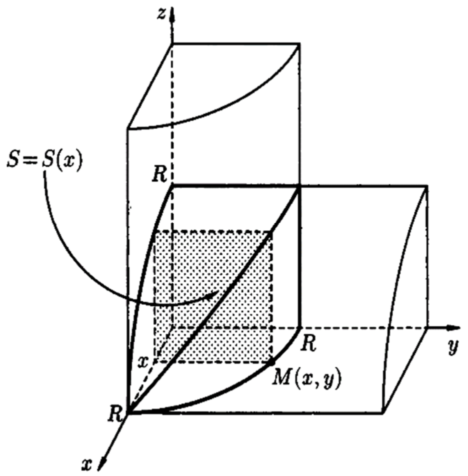


Рис. 104

◔ Изобразим на рисунке восьмую часть тела, расположенную в I октанте (см. рис. 104). В поперечном сечении (перпендикулярном оси Ox) тела получится квадрат. Его сторона a равна ординате точки $M(x; y)$, лежащей на окружности $x^2 + y^2 = R^2$, т.е. $a = y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Следовательно, площадь сечения равна $S(x) = (\sqrt{R^2 - x^2})^2 = R^2 - x^2$, $0 \leqslant x \leqslant R$. Используя формулу (3.12) находим

$$\frac{1}{8}V = \int_0^R (R^2 - x^2)\,dx = \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R = \frac{2}{3}R^3,$$

т.е. $V = \dfrac{16}{3}R^3$. ●

9.3.165. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $xy = 6$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, вокруг оси Ox и вокруг оси Oy (см. рис. 105).

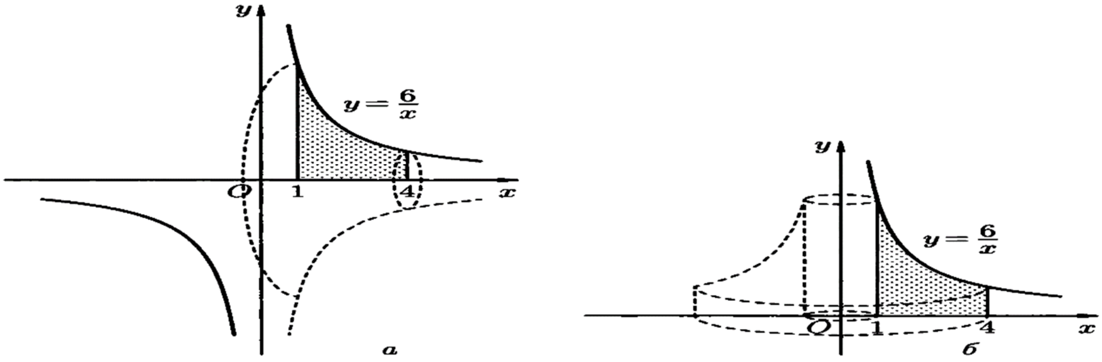


Рис. 105

❍ По формуле (3.13) находим

$$V_x = \pi \int_1^4 \left(\frac{6}{x}\right)^2 dx = 36\pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^4 = 27\pi\,.$$

По формуле (3.14) находим

$$V_y = 2\pi \int_1^4 x \cdot \frac{6}{x}\, dx = 2\pi \cdot 6x\Big|_1^4 = 36\pi\,. \quad \bullet$$

9.3.166. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy области, ограниченной линиями $y = e^{-x}$, $x = 0$, $y = 0$ $(x \geqslant 0)$.

❍ Используя формулу (3.15), находим

$$V_y = \pi \int_0^1 (-\ln y)^2\, dy = \pi \int_0^1 \ln^2 y\, dy =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} u = \ln^2 y & du = 2\ln y \cdot \frac{1}{y}\, dy \\ dv = dy & v = y \end{array}\right] =$$

$$= \pi\left(\lim_{\varepsilon\to 0} y\ln y\Big|_{0+\varepsilon}^1 - 2\int_0^1 \ln y\, dy\right) = \left[\begin{array}{c|c} u = \ln y & du = \frac{1}{y}\, dy \\ dv = dy & v = y \end{array}\right] =$$

$$= \pi\left(0 - 2\left(\lim_{\varepsilon\to 0} y\ln y\Big|_{0+\varepsilon}^1 - y\Big|_0^1\right)\right) = -2\pi(0-1) = 2\pi\,.$$

Заметим, что можно использовать формулу (3.14):

$$V_y = 2\pi \int_0^{+\infty} xe^{-x}\, dx = 2\pi\left(\lim_{b\to\infty} (-xe^{-x} - e^{-x})\Big|_0^b\right) =$$

$$= 2\pi(0+1) = 2\pi\,. \quad \bullet$$

9.3.167. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Для нахождения объема тела вращения используем формулу (3.13):

$$V_x = \pi \int_0^{2\pi} (a(1-\cos t))^2 \cdot a(1-\cos t)\,dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\,dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \Big(1 + \frac{3}{2}(1+\cos 2t) - 3\cos t - \frac{\cos 3t + 3\cos t}{4}\Big)\,dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \Big(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\cos 2t - \frac{15}{4}\cos t - \frac{1}{4}\cos 3t\Big)\,dt =$$

$$= \pi a^3 \Big(\frac{5}{2}t + \frac{3}{4}\sin 2t - \frac{15}{4}\sin t - \frac{1}{12}\sin 3t\Big)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \pi a^3 \cdot 5\pi = 5\pi^2 a^3 .$$

9.3.168. Найти объем тела, образованного вращением вокруг прямой $x = -2$ области, ограниченной линиями $y = x^3$, $x = -1$, $x = 0$, $y = 4$.

Перенесем начало координат в точку $O_1(-2;0)$, сохранив направление осей (см. рис. 106). В новой системе координат уравнение кубической параболы примет вид $y = (x_1 - 2)^3$, отсюда $x_1 = 2 + \sqrt[3]{y}$. Объем $V_н$ нижней части тела (под осью Ox) найдем как разность двух объемов: $V_н = V_1 - V_2$, где

$$V_2 = \pi \int_{-1}^{0} (2 + \sqrt[3]{y})^2 dy = \frac{8}{5}\pi, \quad V_1 = \pi \int_{-1}^{0} 1\,dy = \pi$$

(или как объем цилиндра с высотой 1 и радиусом основания 1). Имеем $V_н = \frac{8}{5}\pi - \pi = \frac{3}{5}\pi$. Объем $V_в$ верхней части тела (над осью Ox), очевидно, равен $V_в = 12\pi$ (как разность объемов прямых круговых цилиндров: $V = \pi \cdot 4 \cdot 4 - \pi \cdot 1 \cdot 4 = 12\pi$). Таким образом, $V = V_н + V_в = \frac{3}{5}\pi + 12\pi = \frac{63}{5}\pi$.

Замечание. Искомый объем тела можно найти, используя формулу $V = \int_a^b S(y)\,dy$. Любое сечение тела вращения плоскостью, перпендикулярной оси вращения, есть кольцо, ограниченное концентрическими окружностями. Найдем $S(y)$ для верхней и нижней части тела вращения:

$$S_в(y) = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2 = 3\pi;$$

$$S_н(y) = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(2 + \sqrt[3]{y})^2 - \pi \cdot 1^2 = \pi(3 + 4\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}).$$

Следовательно,

$$V = V_в + V_н = \int_0^4 3\pi\,dy + \int_{-1}^{0} \pi(3 + 4\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2})\,dy = \frac{63}{5}\pi.$$

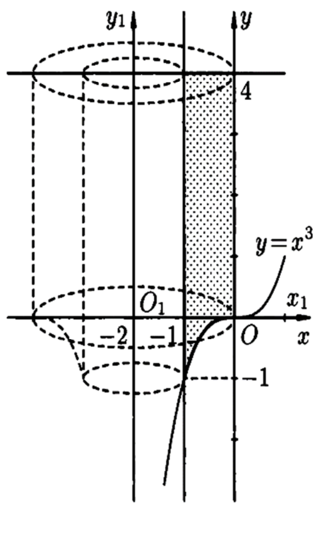


Рис. 106

9.3.169. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$.

Построим чертеж (см. рис. 107). Графики функций пересекаются в точках $(1;1)$ и $(2;0)$. Используя формулу (3.13), находим

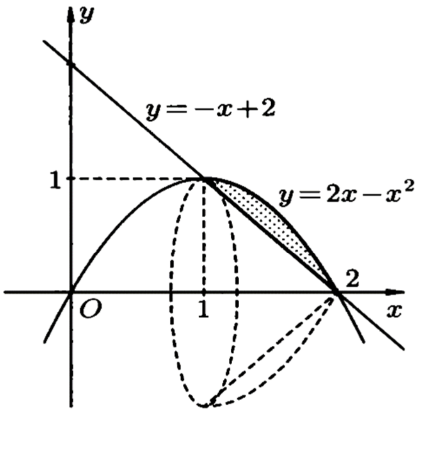


Рис. 107

$$V = \int_1^2 (2x - x^2)^2\,dx - \int_1^2 (-x+2)^2\,dx =$$

$$= \int_1^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4 - x^2 + 4x - 4)\,dx =$$

$$= \int_1^2 (x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{5}.$$

Физические (механические) приложения определенного интеграла

а) *Путь, пройденный телом,* перемещающимся со скоростью $v = v(t)$, за промежуток времени $[t_1; t_2]$, выражается интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt. \qquad (3.20)$$

б) *Работа переменной силы,* заданной функцией $F = F(x)$ и направленной вдоль оси Ox на отрезке $[a; b]$, равна интегралу

$$A = \int_a^b F(x)\,dx. \qquad (3.21)$$

г) *Статические моменты, относительно координатных осей, моменты инерции и координаты центра тяжести* плоской дуги $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, находятся соответственно по формулам

$$S_x = \int_a^b \gamma y\,dl, \quad S_y = \int_a^b \gamma x\,dl, \qquad (3.23)$$

$$M_x = \int_a^b \gamma y^2\,dl, \quad M_y = \int_a^b \gamma x^2\,dl, \qquad (3.24)$$

где $dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2}\,dx$ $\left(\sqrt{(x'_y)^2 + (y'_x)^2}\,dt,\ \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2}\,d\varphi\right)$ — дифференциал дуги;

$$x_c = \frac{S_y}{m}, \quad y_c = \frac{S_x}{m}, \quad m = \int_a^b \gamma\sqrt{1 + (y'_x)^2}\,dx \qquad (3.25)$$

(здесь x_c, y_c — координаты центра тяжести, а m — масса кривой).

9.3.249. Автобус начинает двигаться с ускорением $1\,\text{м/с}^2$. Какой путь пройдет автобус за 12 секунд от начала движения?

○ Скорость движения автобуса выражается формулой $v = t$ м/с. Согласно формуле (3.20) находим путь, пройденный автобусом за время от $t_1 = 0$ до $t_2 = 12$ сек.: $\int\limits_0^{12} t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{12} = 72$ м. ●

9.3.252. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружину на 10 см, если сила в 20 Н растягивает пружину на 5 см.

○ Согласно закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т. е. $F(x) = kx$, где k — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи сила $F = 20$ Н растягивает пружину на $x = 0{,}05$ м. Следовательно, $20 = k \cdot 0{,}05$, откуда $k = 400$, $F = 400x$. Искомая работа на основании формулы (3.21) равна

$$A = \int\limits_0^{0,1} 400x\,dx = 200x^2\Big|_0^{0,1} = 2 \text{ Дж}.$$ ●

9.3.262. Найти статический момент однородной (плотность $\gamma = \text{const}$) дуги кривой $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, относительно оси Ox.

○ Используем формулы (3.23). Так как $y = \cos x$, то

$$dl = \sqrt{1 + (\cos x)'}\,dx = \sqrt{1 + \sin^2 x}\,dx.$$

Имеем

$$S_x = \gamma \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}\,dx = \gamma \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + (\sin x)^2}\,d(\sin x) =$$

$$= \gamma\Big(\frac{\sin x}{2}\sqrt{1 + \sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\big|\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}\,\big|\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \gamma\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1 + \sqrt{2})\Big) = \frac{1}{2}\gamma(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})).$$ ●

9.3.263. Вычислить массу и момент инерции плоского однородного стержня ($\gamma = 1$) длины l относительно его конца.

○ Совместим стержень с отрезком оси Ox, $0 \leqslant x \leqslant l$, (левый конец стержня — в точке O). Для нахождения массы стержня используем формулу (3.25), положив в ней $y = 0$, $y' = 0$:

$$m = \int\limits_0^{l} \gamma\sqrt{1 + 0^2}\,dx = \gamma x\Big|_0^{l} = \gamma l$$

(результат известен: стержень однородный). Момент инерции стержня равен моменту инерции его относительно оси Oy. Применим формулу (3.23):

$$M_y = \int\limits_0^{l} \gamma x^2\sqrt{1 + 0^2}\,dx = \gamma\frac{x^3}{3}\Big|_0^{l} = \frac{\gamma l^3}{3},$$

т. е. $M_y = \frac{\gamma l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$, где m — масса стержня. ●